FILTRO PASSA-BASSO DEL 2° ORDINE

Il circuito di figura rappresenta un un filtro passa-basso attivo. Insieme all'operazionale lavorano due resistenze di ugual valore R e due condensatori di capacità l'uno metà dell'altro.
L'amplificatore operazionale lavora come inseguitore di tensione, perciò:

$$V_P = V_Q = V_o$$

Nel nodo N il 1° principio di Kirchhoff ci permette di scrivere:

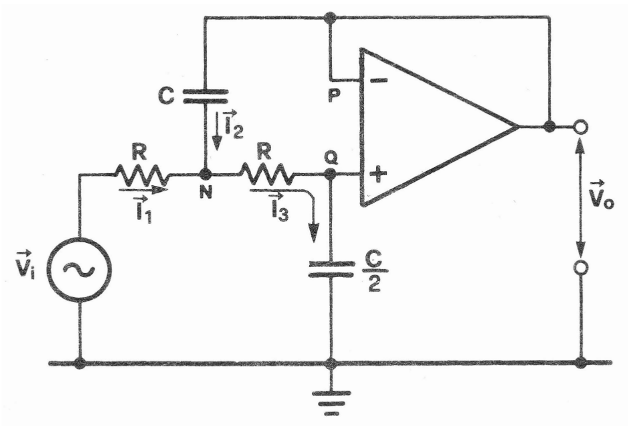
$$I_1 + I_2 = I_3$$

Sostituendo le espressioni equivalenti, si ha:

$$\frac{V_i - V_N}{R} + \left(V_P - V_N\right) j\omega C = \frac{V_N - V_Q}{R}$$

inoltre, poiché da Q l'operazionale non assorbe corrente:

$$\frac{V_N - V_Q}{R} = j\omega \frac{C}{2} V_Q$$



Filtro passabasso del 2° ordine

In entrambe le equazioni sostituiamo V_o, al posto di V_Q, e V_P, e moltiplichiamo per R:

$$\begin{cases} V_i - V_N + \left(V_o - V_N\right) j\omega RC = V_N - V_o \\ V_N - V_o = j\omega R \dfrac{C}{2} V_o \end{cases}$$

Sostituiamo nella l^a equazione l'espressione di $V_N - V_o$ ricavata dalla 2^a e in quest'ultima isoliamo V_N :

$$\begin{cases} V_i - V_N - j\omega R\dfrac{C}{2}V \cdot j\omega RC = j\omega R\dfrac{C}{2}V_o \\ V_N = V_o + j\omega R\dfrac{C}{2}V_o \end{cases}$$

Ora la 2ª equazione dà:

$$V_N = V_o\left(1 + j\omega R\frac{C}{2}\right)$$

e tale espressione possiamo sostituirla nella 1ª equazione. Così:

$$V_i - V_o\left(1 + j\omega R\frac{C}{2}\right) + \frac{(\omega RC)^2}{2}V_o = j\omega R\frac{C}{2}V_o$$

Elaboriamo ed abbiamo dopo alcuni passaggi:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 - \dfrac{(\omega RC)^2}{2} + j\omega RC}$$

Il modulo e la fase di questa f.d.t. saranno:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{(\omega RC)^2}{2}\right)^2 + (\omega RC)^2}}$$

$$\phi = -\arctan\frac{\omega RC}{1 - \dfrac{(\omega RC)^2}{2}}$$

sviluppando otteniamo:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(\omega RC)^4}{4}}}$$

Calcoliamo il guadagno in dB:

$$G = \left|\frac{V_o}{V_i}\right|_{dB} = 20\log\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = -10\log\left(1 + \frac{(\omega RC)^4}{4}\right)$$

Nella seguenti figure vengono riportati i diagrammi del modulo e della fase:

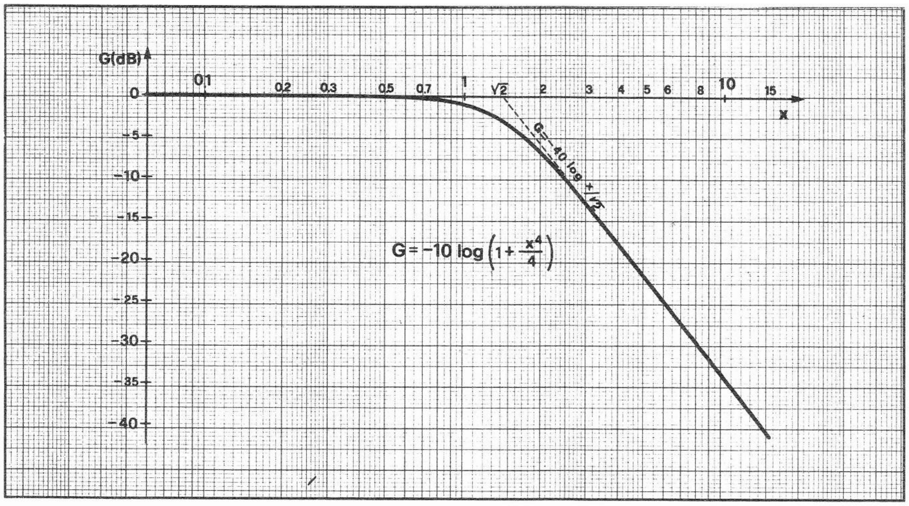


Diagramma di Bode del filtro passa-basso del 2° ordine

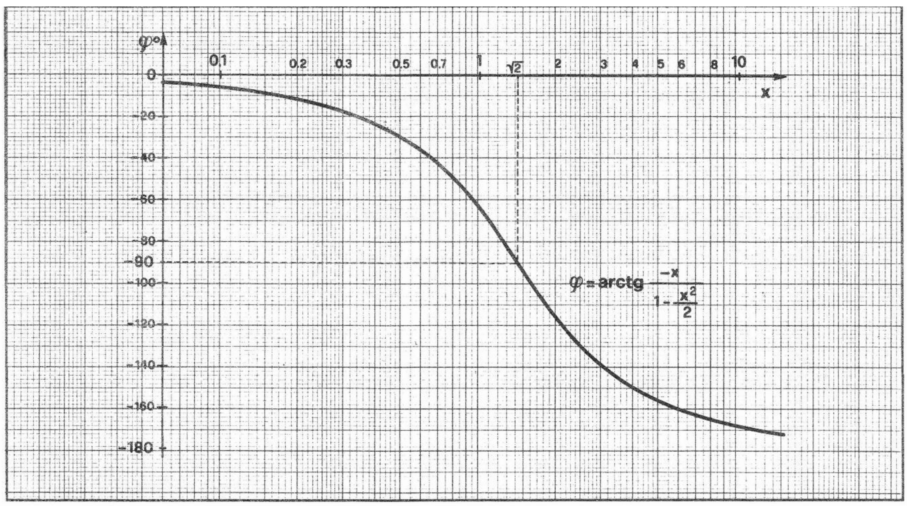


Diagramma degli sfasamenti del filtro passa-basso del 2° *ordine*

Inconsueto è il comportamento della fase: vale 0° per frequenze molto basse, -90° per $\omega RC = \sqrt{2}$ ed è -180°per frequenze molto alte.

Adesso vogliamo calcolare il diagramma di Bode approssimato per G.
Per *piccoli valori di* ωRC, inferiori ad 1, la sua quarta potenza sarà molto, molto piccola, così si potrà assumere:
$G = -10 \log 1$,
cioè: $G = 0$ dB
Per *grandi valori di* ωRC, potremmo supporre che 1 possa essere trascurato rispetto alla sua quarta potenza, così potremmo scrivere:

$$G = -10 \log \frac{(\omega RC)^4}{4}$$

Scriviamo per comodità $4 = \left(\sqrt{2}\right)^4$, così:

$$G = -10\log\left(\frac{\omega RC}{\sqrt{2}}\right)^4 = -40\log\frac{\omega RC}{\sqrt{2}}$$

Essendo una funzione logaritrnica, nella scala logaritmica, verrà rappresentata da una retta con pendenza -40 dB/dec.
Il diagramma di Bode asintotico presenta il suo punto di massimo scostamento da quello reale per $\omega RC = \sqrt{2}$. Sostituendo tale valore nella formula generale, risulta:

$$G = -10\log\left(1 + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4}\right) = -10\log(1+1) \cong -3 \text{ dB}$$

E poiché 3 dB è il valore limite tollerato, possiamo affermare che $\omega RC = \sqrt{2}$ delimita proprio la banda passante del filtro.
Esso è appunto un filtro passa-basso in quanto lascia passare dalla continua (frequenza 0) al valore di frequenza f_0, corrispondente a $\omega RC = \sqrt{2}$ entro 3 dB di attenuazione. Calcoliamo il valore di f_0; se:

$$\omega RC = \sqrt{2}$$

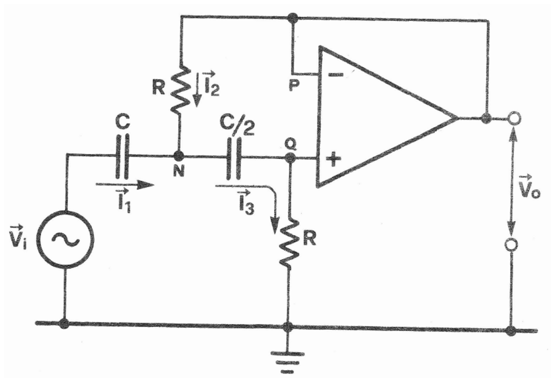
dopo qualche passaggio:

$$f_0 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi RC}$$

e questa è la frequenza di taglio del filtro.
Le alte frequenze vengono attenuate di 40 dB/decade, e questo significa che questo filtro è molto più efficace del filtro RC ad elementi passivi. A parità di condizioni, questo ha un potere attenuativo doppio.

FILTRO PASSA-ALTO DEL 2° ORDINE

Con gli stessi componenti del circuito precedente, invertendone solo la posizione, possiamo disegnare un buon *filtro passa-alto*.



Filtro passa-alto del 2° ordine

Le due resistenze sono uguali, mentre i condensatori hanno capacità l'uno doppia dell'altro. L'amplificatore operazionale lavora anche qui come inseguitore di tensione, perciò:

$$V_P = V_Q = V_o$$

Nel nodo N applichiamo il 1° principio di Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Sostituendo le espressioni equivalenti, si ha:

$$j\omega C(V_i - V_N) + \frac{V_P - V_N}{R} = j\omega \frac{C}{2}(V_N - V_Q)$$

e, poiché in Q l'operazionale non assorbe corrente:

$$j\omega \frac{C}{2}(V_N - V_Q) = \frac{V_o}{R}$$

In entrambe le equazioni moltiplichiamo per R tutti i termini e sostituendo a V_Q e V_P la V_o otteniamo:

$$\begin{cases} \omega RC(V_i - V_N) + (V_o - V_N) = j\dfrac{\omega RC}{2}(V_N - V_o) \\ j\dfrac{\omega RC}{2}(V_N - V_o) = V_o \end{cases}$$

Sostituiamo la relazione di V_o al 2° membro della 1ª equazione:

$$j\omega RC(V_i - V_N) + (V_o - V_N) = V_o$$

Elaboriamola per ricavarne V_N ; tralasciamo qualche passaggio:

$$V_N = j\frac{\omega RC}{j\omega RC + 1}V_i$$

Elaboriamo anche la 2ª equazione isolando dapprima V_o e sostituendo poi a V_N l'equazione ricavata sopra. A calcoli fatti otteniamo la seguente relazione:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(\omega RC)^2}{(\omega RC)^2 - 2 - 3j\omega RC}$$

Ottenuta l'espressione complessa della f.d.t., calcoliamo l'angolo di fase.

$$\phi = \arctan\frac{3\omega RC}{(\omega RC)^2 - 2}$$

Come si vede, la tangente è nulla per piccoli valori di ωRC, cioè per basse frequenze.
Finché $\omega RC < \sqrt{2}$, il numeratore è positivo, il denominatore è negativo e la tangente è negativa; man mano che ωRC si avvicina a $\sqrt{2}$, essa è negativa e grandissima; appena oltrepassa il valore $\omega RC = \sqrt{2}$, essa è positiva e grandissima e va man mano riducendosi finché per alti valori di x essa diviene di nuovo nulla.
Meditando sulla circonferenza trigonometrica, deduciamo che due sono le escursioni possibili dell'angolo ϕ che danno origine all'escursione della tangente sopra descritta: da 0° a -180° oppure da 180° a 0°.
Poiché i segnali a frequenza alta escono indisturbati, cioè a fase 0, scegliamo questo secondo intervallo.

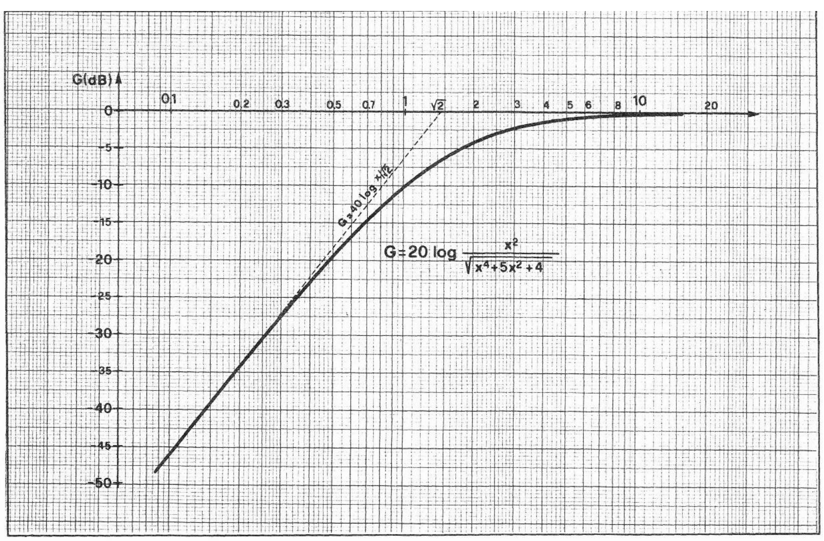
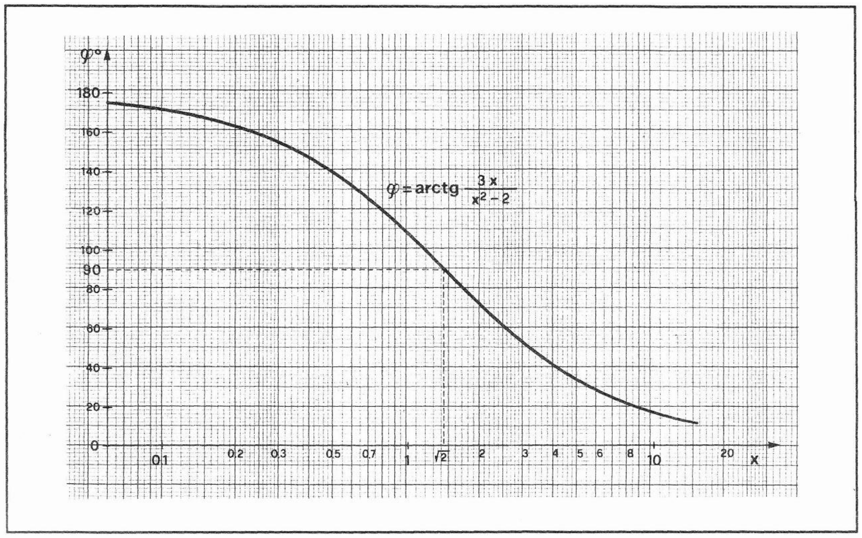


Diagramma di Bode del filtro passa-alto del 2° ordine



Angolo di fase del filtro passa-alto del 2° ordine

Determiniamo il modulo della f.d.t. ricavata:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{(\omega RC)^2}{\sqrt{\left[(\omega RC)^2 - 2\right]^2 + 9(\omega RC)^2}}$$

Sviluppando il denominatore:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{(\omega RC)^2}{\sqrt{(\omega RC)^4 + 5(\omega RC)^2 + 4}}$$

Il guadagno in decibel diventa allora:

$$G = 20\log\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = 20\log\frac{(\omega RC)^2}{\sqrt{(\omega RC)^4 + 5(\omega RC)^2 + 4}}$$

Per ωRC *molto inferiore ad 1*, la sua quarta potenza e il suo quadrato sono ben trascurabili rispetto al numero 4, così per G risulta l'espressione:

$$G = 20\log\frac{(\omega RC)^2}{\sqrt{4}}$$

che conviene scrivere nella forma:

$$G = 20\log\left(\frac{\omega RC}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ovvero:

$$G = 40\log\left(\frac{\omega RC}{\sqrt{2}}\right)$$

E' come sempre una retta, essendo il diagramma (in scala logaritmica) de lla funzione logaritmica.
Per $\omega RC = \sqrt{2}$, si ha:

$$G = 40\log\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ dB}$$

Trovandoci nell'ambito dei piccoli valori di x, calcoliamo G una decade più in giù, cioè per $\omega RC = 0{,}1\sqrt{2}$; risulta:

$$G = 40\log\left(\frac{0{,}1\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -40 \text{ dB}$$

Per x *molto grande*, nell'espressione completa di G la sua quarta potenza prevale sugli altri termini. Ne risulta:

$$G = 20\log\frac{(\omega RC)^2}{\sqrt{(\omega RC)^4}} = 20\log 1 = 0 \text{ dB}$$

Dunque, per grandi valori di ωRC (alte frequenze) la rete lascia passare il segnale indisturbato.
Per $\omega RC = \sqrt{2}$ a conti fatti risulta:
$G = -6{,}5 \text{ dB}$
quindi stavolta non è $\omega RC = \sqrt{2}$ l'estremo della banda passante, cioè il valore attenuato di 3 dB. Facendo un po' di calcoli, risulta che per $\omega RC = 2{,}39$ si ha $G = -3$ dB.
Perciò la frequenza di taglio è:

$$f_0 = \frac{2{,}39}{2\pi RC}$$

il filtro è detto passa-alto perché al di sopra di tale frequenza i segnali passano con un'attenuazione che non supera i 3 dB.